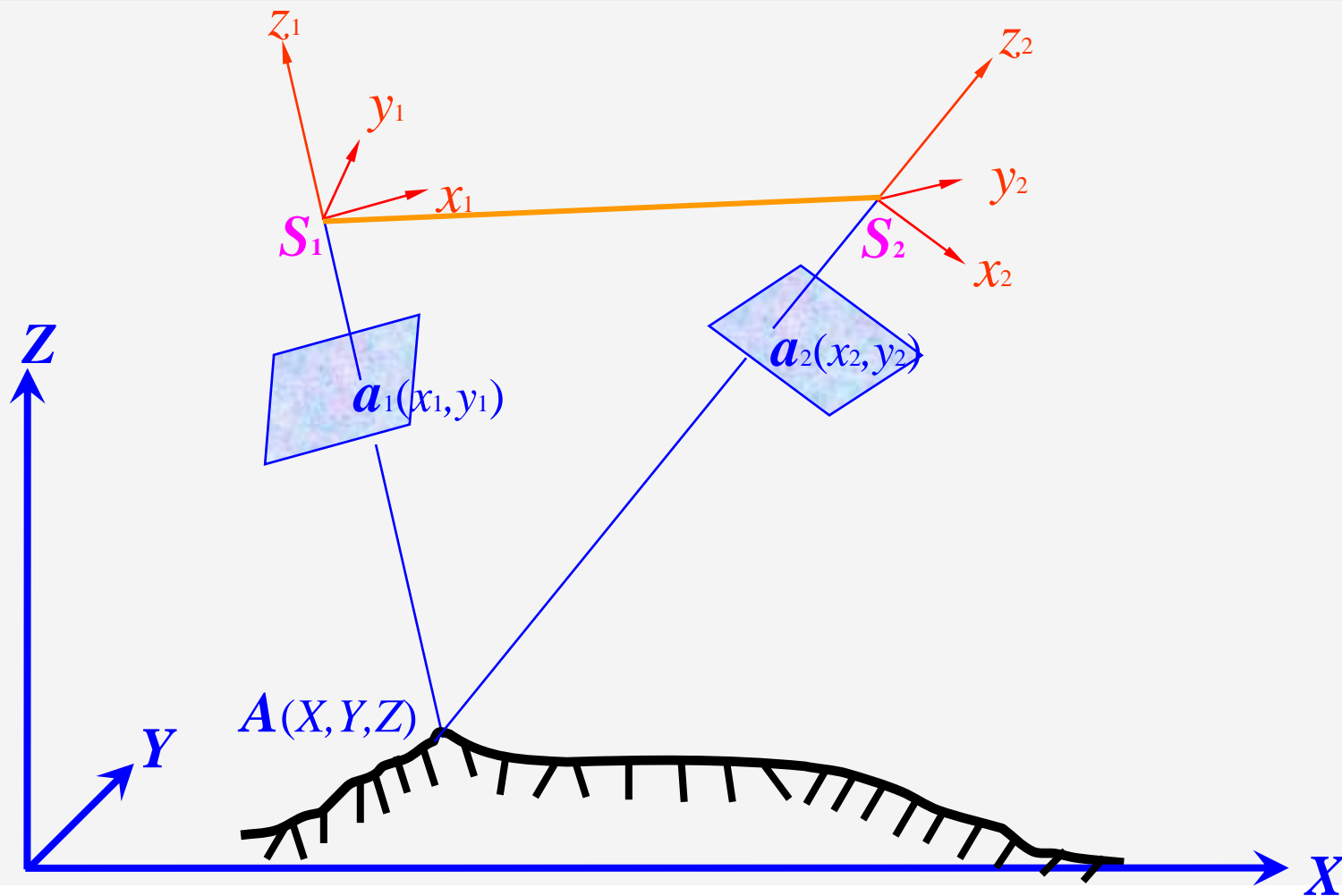


影像

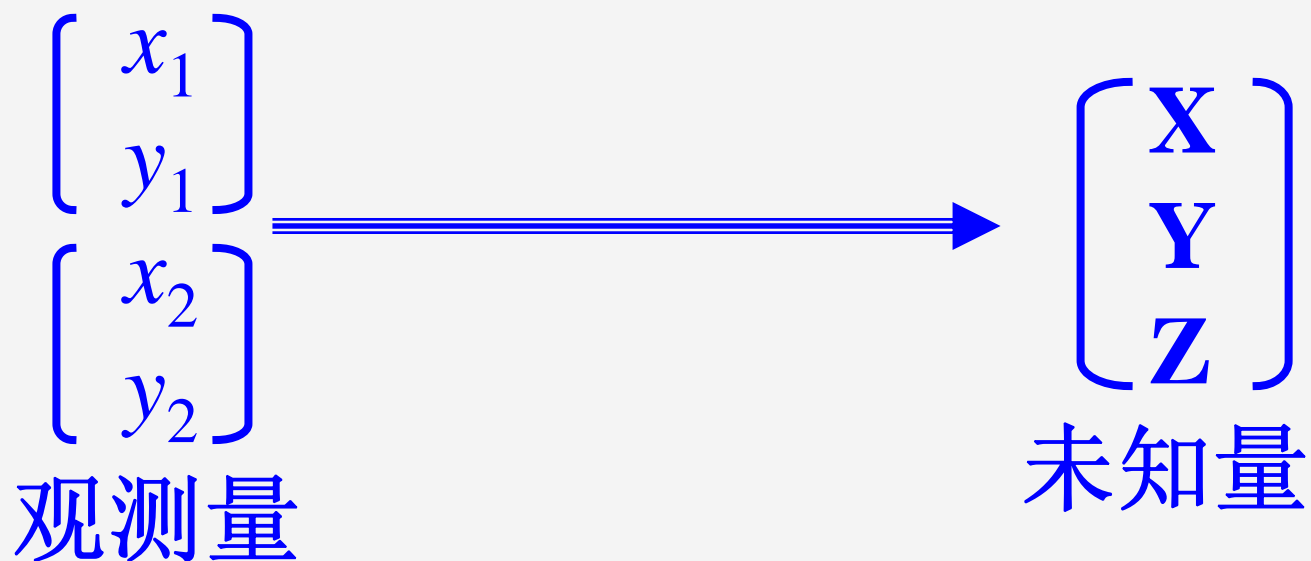


(X, Y, Z)

共线条件

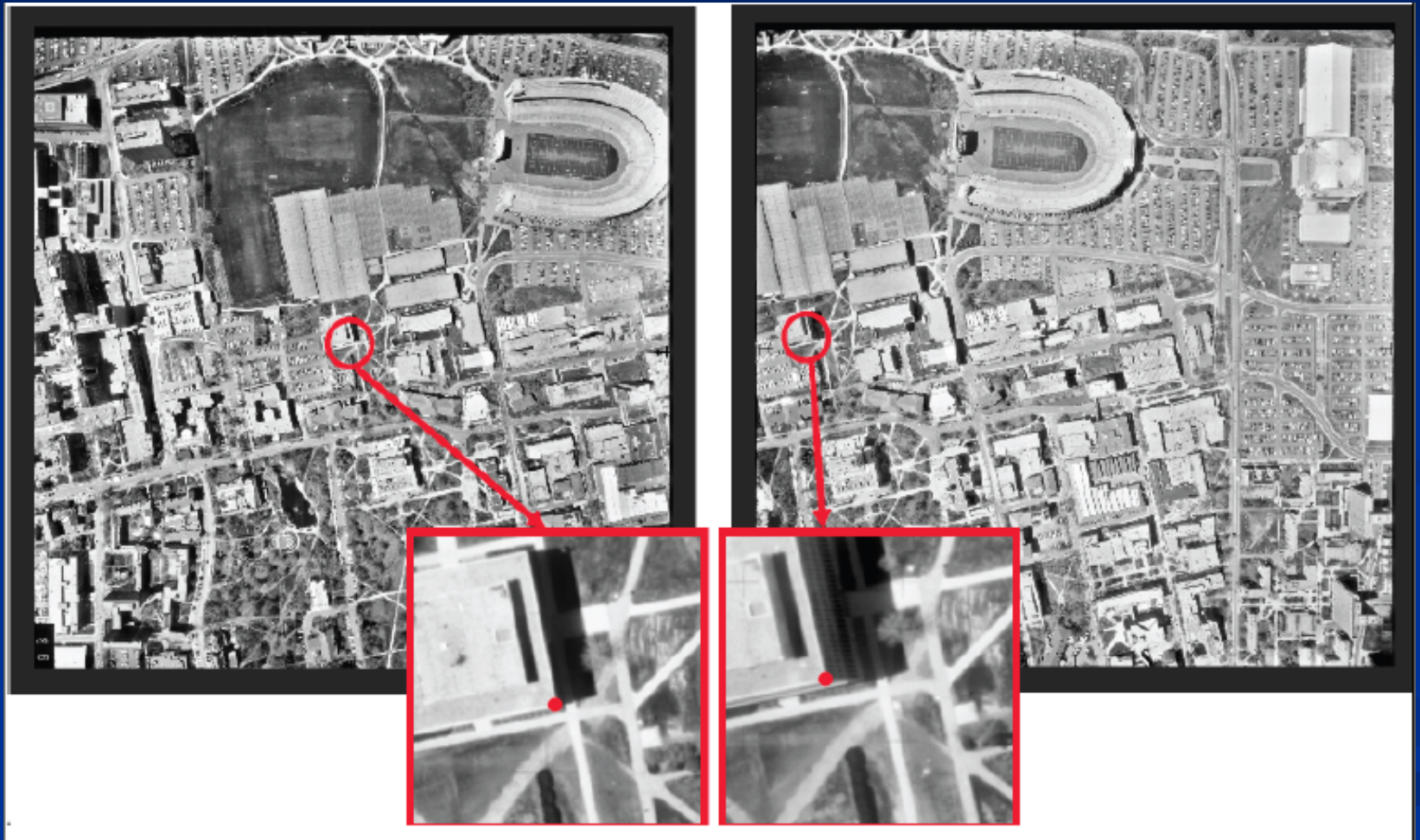


立体摄影测量

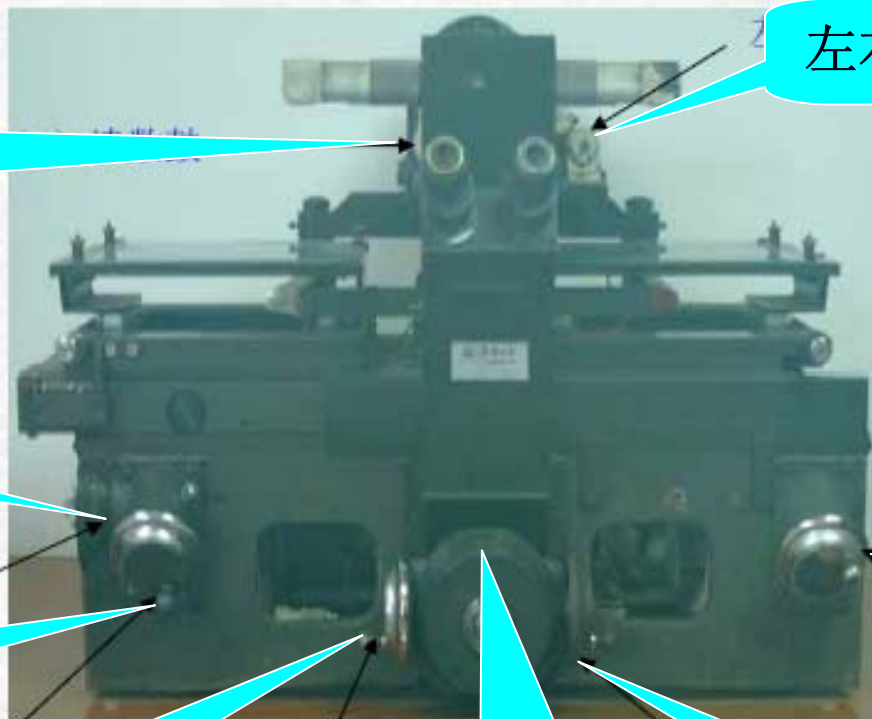


第五章 摄影测量解析基础

§ 5—1 像点坐标量



同名像点坐标？



左右视差读数

上下视
差读数

X读数

X手轮

Y手轮

Y读数

上下视差环

左右视差手轮

Steko 1818 型立体坐标量测仪

像片归心：框标连线交点与旋转中心重合

像片定向：像平面坐标轴系平行于坐标仪坐标轴系，移动X手轮，测标沿像片的X轴运动

像点量测

左片像点坐标 (x_1, y_1) 右片像点坐标 (x_2, y_2)

$$x_1 = X - X_0 \qquad x_2 = x_1 - (P - P_0)$$

$$y_1 = Y - Y_0 \qquad y_2 = y_1 - (Q - Q_0)$$

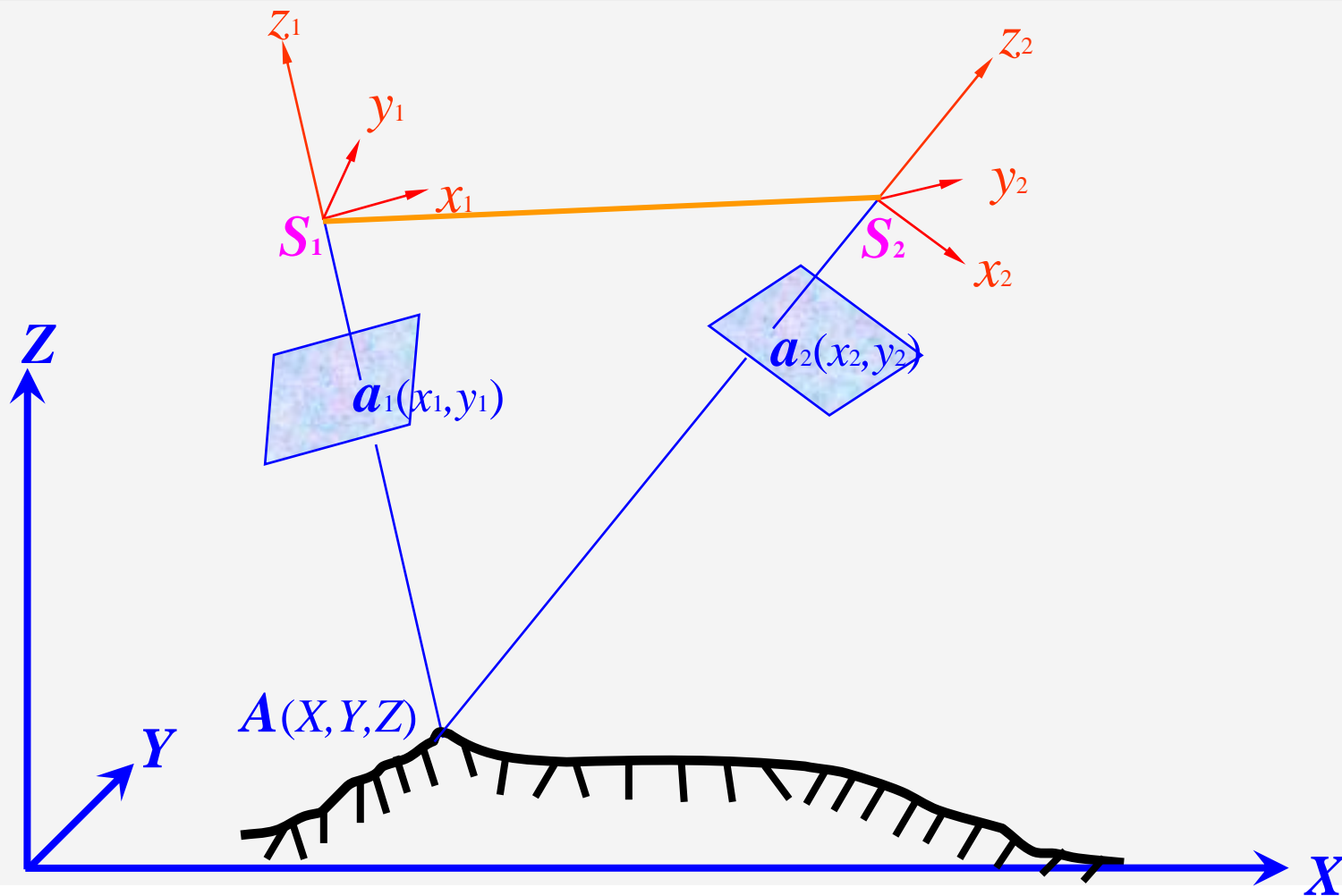
X_0, Y_0, P_0, Q_0 是仪器零位置读数

左右视差：同名像点在各自的像平面坐标系的 x 坐标之

$$p = x_1 - x_2$$

上下视差：同名像点在各自的像平面坐标系的 y 坐标之

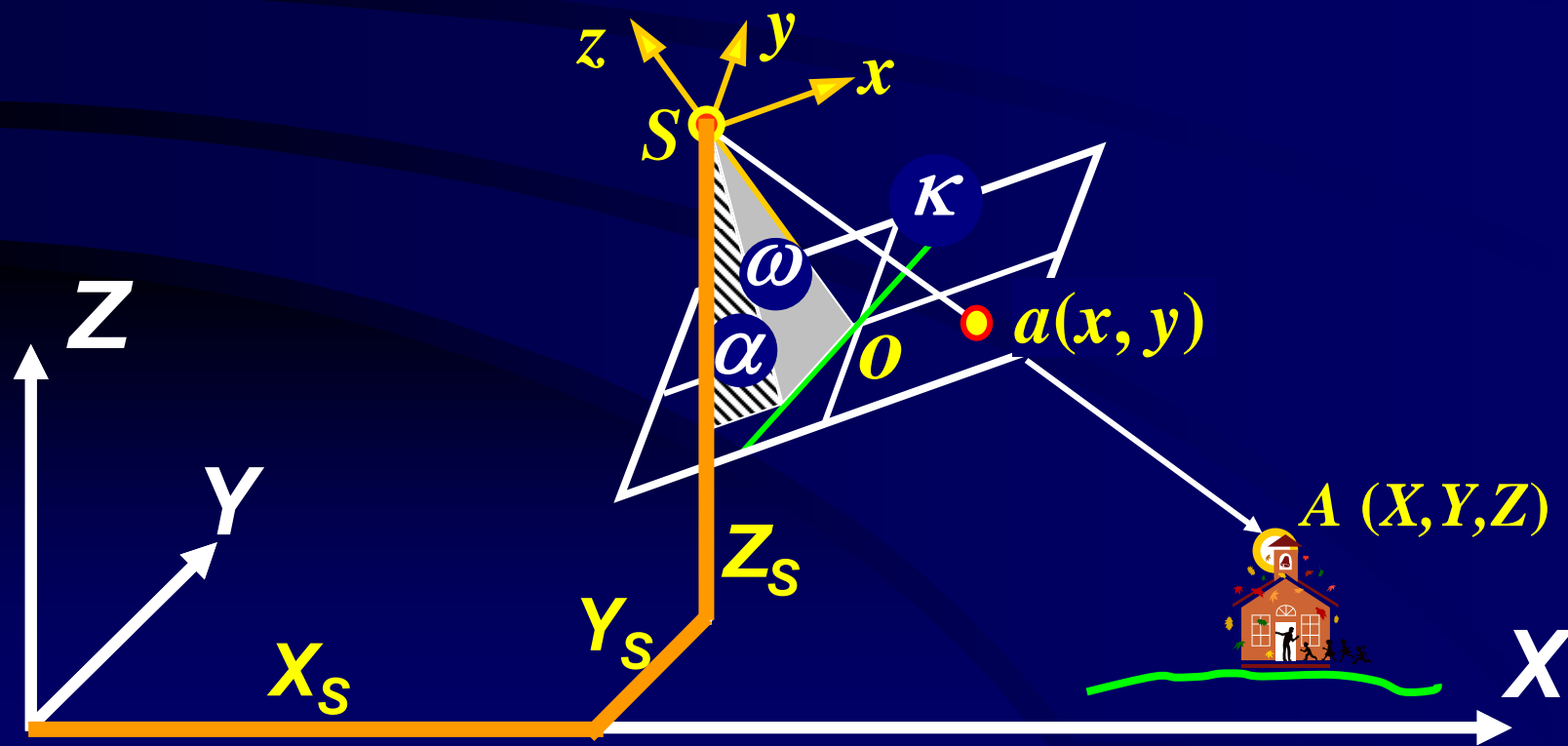
$$q = y_1 - y_2$$



摄影机的外方位元素

它由摄影中心 S 在空间坐标系中的位置（三个坐标） X_s 、 Y_s 、 Z_s

与主光轴 So 的三个姿态角 φ 、 ω 、 κ 组成



有 **6** 个外方位元素

摄影中心 S 的位置

X_s 、 Y_s 、 Z_s

摄影机姿态角

φ 、 ω 、 κ

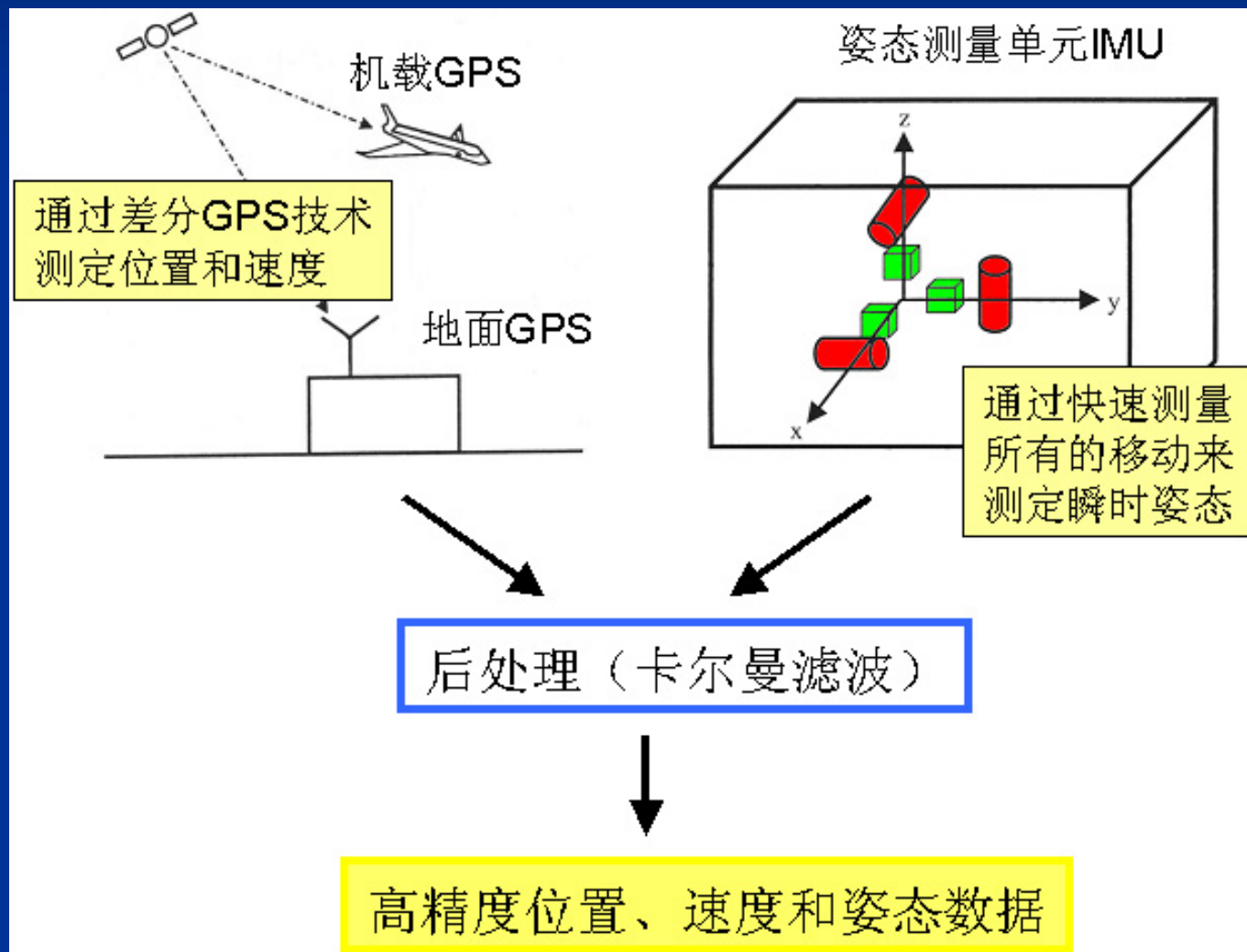
每张影像各不相同，如何测定？？

§ 5-2 单像空间后方交会

获取六个外方位元素的方法？

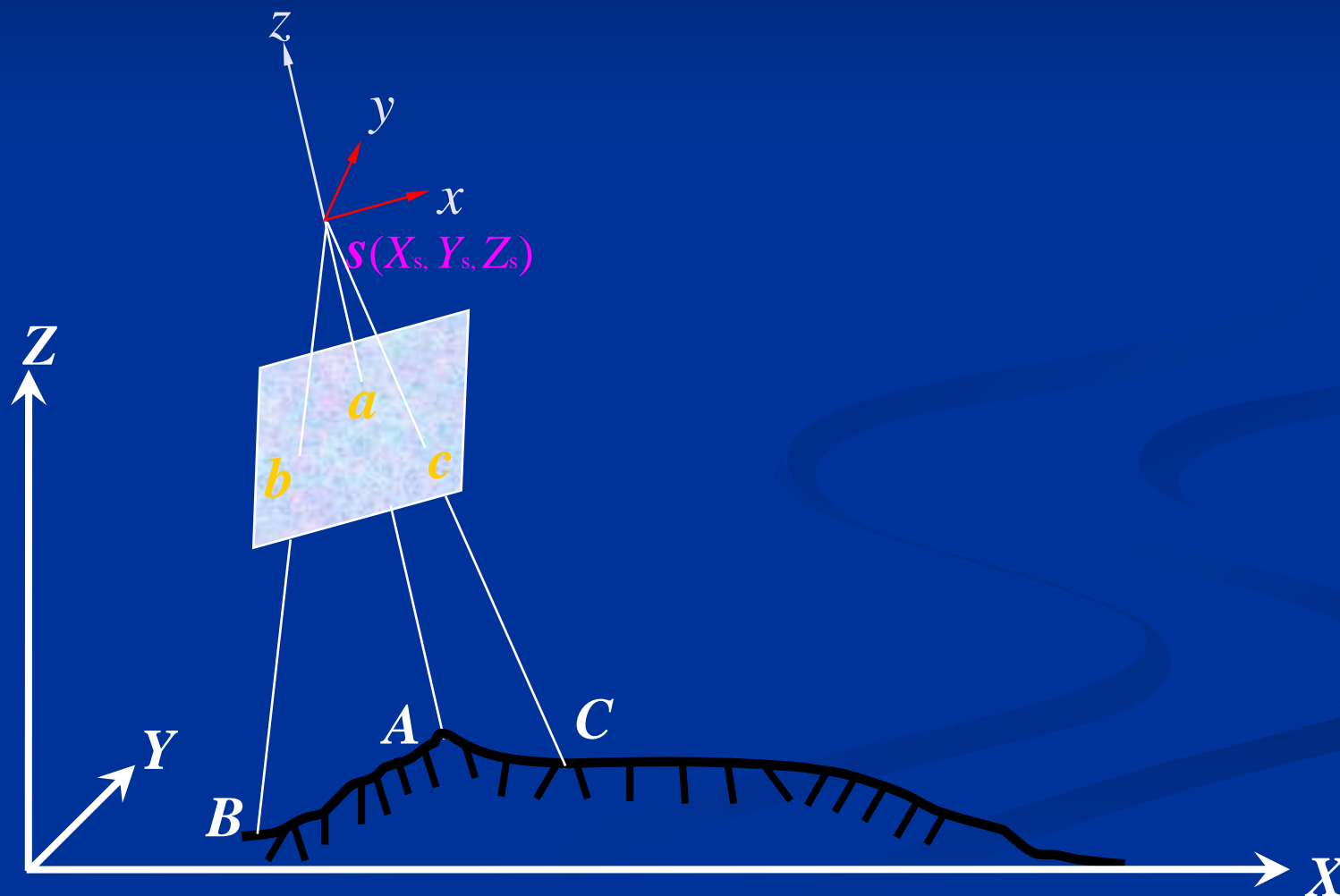
- ✓ 雷达、**GPS**、**INS**、星象相机
- ✓ 地面控制点反算（单像空间后方交会）

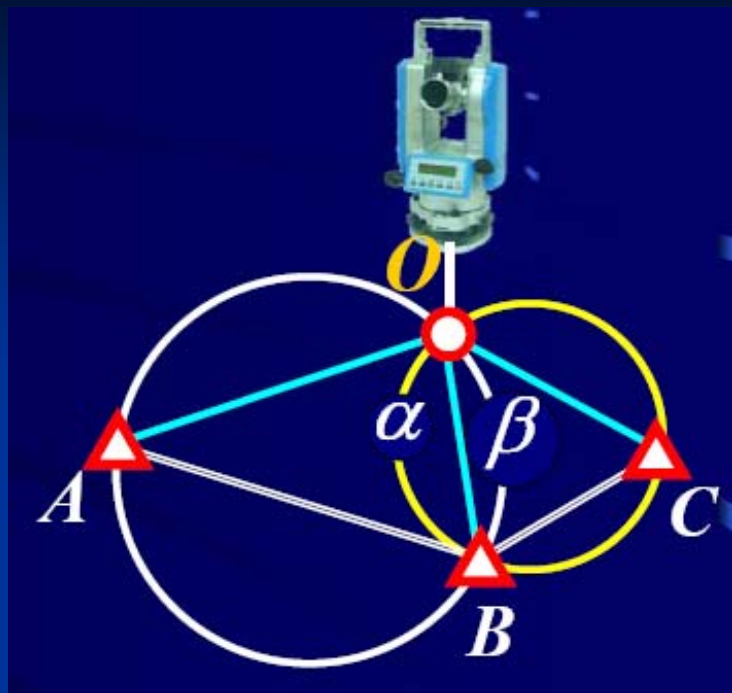
POS系统



一、空间后方交会的定义

利用一定数量的地面控制点，根据共线条件方程式，解求像片外方位元素的过程

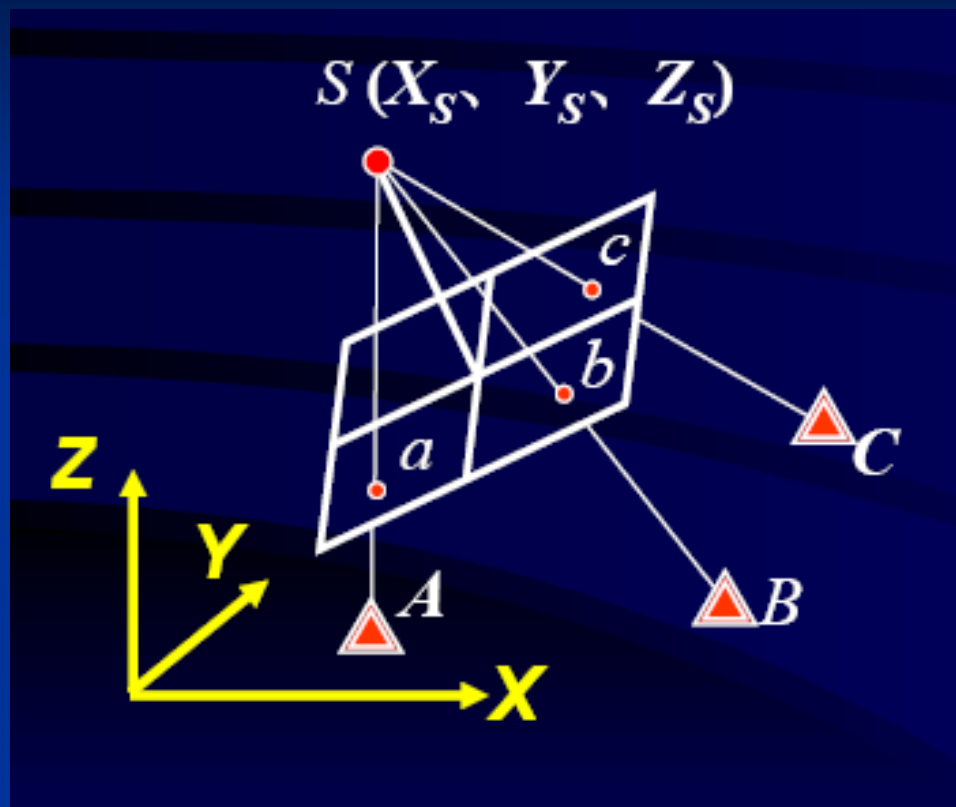




后方交会

$$x_P = \frac{x_A \operatorname{ctg} \beta + x_B \operatorname{ctg} \alpha - y_A + y_B}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$y_P = \frac{y_A \operatorname{ctg} \beta + y_B \operatorname{ctg} \alpha + x_A - x_B}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$



摄影测量的后方交会

关系式？

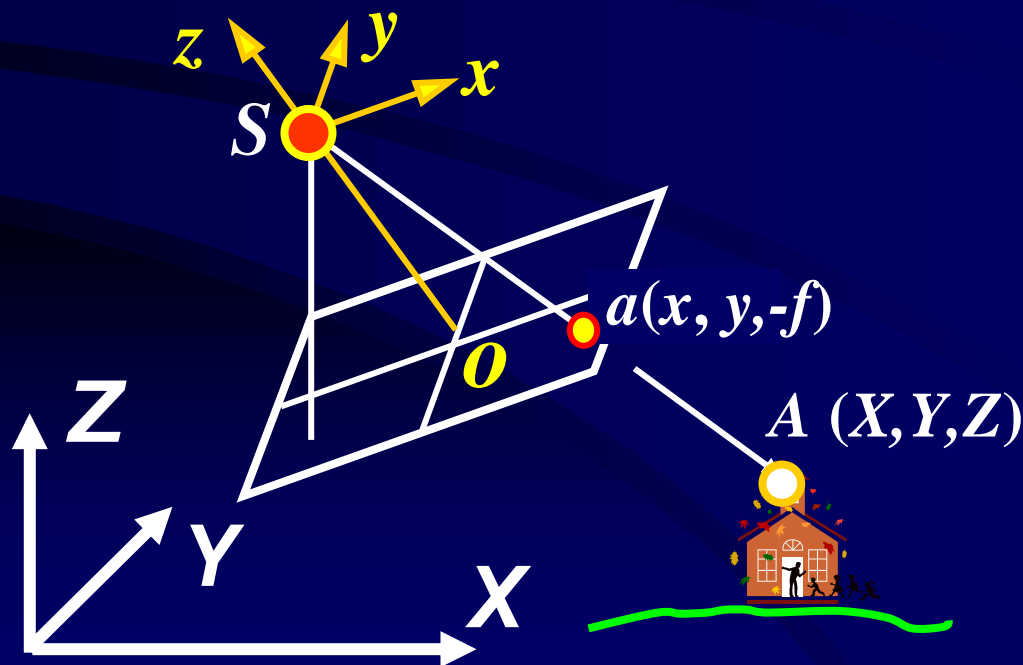
像片的外方位元素

三点共线方程

通过摄影机的内、外方位元素，描述三点共线的数学方程式

三点？

摄影中心 S 地面点 A 像点 a



$$x - x_0 = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$y - y_0 = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

x_0 、 y_0 、 f —内方位元素

X_s 、 Y_s 、 Z_s —外方位元素

a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1是由三个角元素 ϕ 、 ω 、 κ ，构成的旋转（正交）矩阵的9个系数：

$$R = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \cos \phi \cos \kappa - \sin \phi \sin \omega \sin \kappa$$

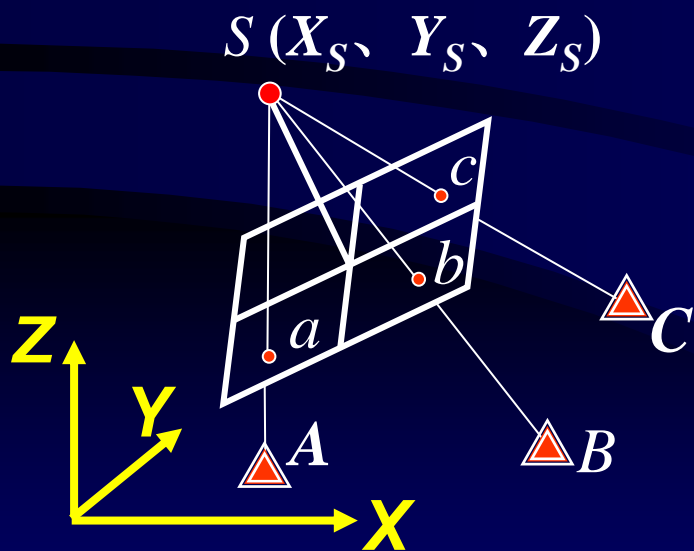
$$a_2 = -\cos \phi \sin \kappa - \sin \phi \sin \omega \cos \kappa$$

$$\vdots$$

$$c_3 = \cos \phi \cos \omega$$

摄影测量的空间交会

当已知（至少）三个空间已知点 A 、 B 、 C ，与它们在影像上的三个对应点 a 、 b 、 c ，就能求得影像的 6 个外方位元素。



其理论基础为：共线方程，一个点有两个方程，已知三个点可列6个方程，因此可以解得6个外方位元素。

二、基本关系式

共线条件方程

$$x = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$y = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

◆已知值： x_0, y_0, f, m, X, Y, Z （控制点）

◆观测值： x, y

◆待求： $X_s, Y_s, Z_s, a_1 a_2 a_3 \cdots c_3$ （由外方位角元素
 φ, ω, κ 确定）

非线性函数模型，线性化

像片的外方位元素

线性化：按泰勒公式展开，取小值一次项

$$x = (x) + \frac{\partial x}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$y = (y) + \frac{\partial y}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} d\kappa$$

$(x), (y)$ 像点坐标近似值，将外方位元素的初始值代入共线条件方程的计算值

$$(x) = -f \frac{a_1^0 (X - X_{s_0}) + b_1^0 (Y - Y_{s_0}) + c_1^0 (Z - Z_{s_0})}{a_3^0 (X - X_{s_0}) + b_3^0 (Y - Y_{s_0}) + c_3^0 (Z - Z_{s_0})}$$

$$(y) = -f \frac{a_2^0 (X - X_{s_0}) + b_2^0 (Y - Y_{s_0}) + c_2^0 (Z - Z_{s_0})}{a_3^0 (X - X_{s_0}) + b_3^0 (Y - Y_{s_0}) + c_3^0 (Z - Z_{s_0})}$$

$$\frac{\partial x}{\partial X_s} \dots \frac{\partial y}{\partial \kappa}$$

偏导数，系数

$dX_s, dY_s, dZ_s, d\varphi, d\omega, d\kappa$ 外方位元素初始值的改正

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial X_s} &= \frac{\partial \left(-f \frac{\bar{X}}{\bar{Z}} \right)}{\partial X_s} = -\frac{f}{\bar{Z}^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial X_s} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial X_s} \bar{X} \right) \\
&= -\frac{f}{\bar{Z}^2} (-a_1 \bar{Z} + a_3 \bar{X}) \\
&= \frac{1}{\bar{Z}} (a_1 f - f \frac{\bar{X}}{\bar{Z}} a_3) \\
&= \frac{1}{\bar{Z}} [a_1 f + a_3 (x - x_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_s \\ Y - Y_s \\ Z - Z_s \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} X - X_s \\ Y - Y_s \\ Z - Z_s \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{\partial x}{\partial X_s} = \frac{1}{Z} (a_1 f + a_3 x)$$

$$a_{12} = \frac{\partial x}{\partial Y_s} = \frac{1}{Z} (b_1 f + b_3 x)$$

$$a_{13} = \frac{\partial x}{\partial Z_s} = \frac{1}{Z} (c_1 f + c_3 x)$$

$$a_{14} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = y \sin \omega - \left[\frac{x}{f} (x \cos \kappa - y \sin \kappa) + f \cos \kappa \right] \cos \omega$$

$$a_{15} = \frac{\partial x}{\partial \omega} = -f \sin \kappa - \frac{x}{f} (x \sin \kappa + y \cos \kappa)$$

$$a_{16} = \frac{\partial x}{\partial \kappa} = y$$

$$a_{21} = \frac{\partial y}{\partial X_s} = \frac{1}{Z} (a_2 f + a_3 y)$$

$$a_{22} = \frac{\partial y}{\partial Y_s} = \frac{1}{Z} (b_2 f + b_3 y)$$

$$a_{23} = \frac{\partial y}{\partial Z_s} = \frac{1}{Z} (c_2 f + c_3 y)$$

$$a_{24} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -x \sin \omega - \left[\frac{y}{f} (x \cos \kappa - y \sin \kappa) - f \sin \kappa \right] \cos \omega$$

$$a_{25} = \frac{\partial y}{\partial \omega} = -f \cos \kappa - \frac{y}{f} (x \sin \kappa + y \cos \kappa)$$

$$a_{26} = \frac{\partial y}{\partial \kappa} = -x$$

在竖直摄影的情况下，角元素都很小（<3度），各系数可简化为：

$$\varphi \approx \omega \approx \kappa \approx 0 \quad \sin \phi \approx 0 \quad \cos \kappa \approx 1$$

$$a_1 = \cos \phi \cos \kappa - \sin \phi \sin \omega \sin \kappa \approx 1$$

$$a_3 = -\sin \phi \cos \omega \approx 0$$

$$Z - Z_s \approx -H$$

$$a_{11} = \frac{\partial x}{\partial X_s} = \frac{1}{Z} (a_1 f + a_3 x) = -\frac{f}{H}$$

$$a_{12} = 0 \quad a_{13} = -\frac{x}{H} \quad a_{14} = -f \left(1 + \frac{x^2}{f^2}\right) \quad a_{15} = -\frac{xy}{f}$$

$$a_{16} = y \quad a_{21} = 0 \quad a_{22} = -\frac{f}{H} \quad a_{23} = -\frac{y}{H}$$

$$a_{24} = -\frac{xy}{f} \quad a_{25} = -f \left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right) \quad a_{26} = -x$$

有时垂直摄影情况下，可取 $\varphi = \omega = 0$ ， κ 较大，保留 κ

三、误差方程式和法方程式(通常在像片的四个角上选取四个地面控制点)

一个控制点可以列两个方程，至少要三个控制点解六个方位元素，有多余观测用平差的方法计算

观测值：像点坐标

$$x + v_x = (x) + \frac{\partial x}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$y + v_y = (y) + \frac{\partial y}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= a_{11}dX_s + a_{12}dY_s + a_{13}dZ_s + a_{14}d\varphi + a_{15}d\omega + a_{16}d\kappa - l_x \\ v_y &= a_{21}dX_s + a_{22}dY_s + a_{23}dZ_s + a_{24}d\varphi + a_{25}d\omega + a_{26}d\kappa - l_y \end{aligned} \right\}$$

$$l_x = x - (x)$$

$$l_y = y - (y)$$

N个点的误差方程式的矩阵形式:

间接平差: $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} dX_s & dY_s & dZ_s & d\varphi & d\omega & d\kappa \end{bmatrix}^T \quad L = \begin{bmatrix} l_x & l_y \end{bmatrix}^T$$

■ 法方程式（最小二乘原理）

$$A^T P A X = A^T P L$$

P: 像点观测值权阵(观测值量测的相对精度, 视为等精度取 $P = E$)

解得未知数: $X = (A^T A)^{-1} A^T L$

$$X = [dX_s \ dY_s \ dZ_s \ d\varphi \ d\omega \ d\kappa]^T$$

逐步趋近计算

怎样进
行?

$$X_s = X_{s0} + dX_{s1} + dX_{s2} + \cdots$$

$$Y_s = Y_{s0} + dY_{s1} + dY_{s2} + \cdots$$

$$Z_s = Z_{s0} + dZ_{s1} + dZ_{s2} + \cdots$$

$$\varphi = \varphi_0 + d\varphi_1 + d\varphi_2 + \cdots$$

$$\omega = \omega_0 + d\omega_1 + d\omega_2 + \cdots$$

$$\kappa = \kappa_0 + d\kappa_1 + d\kappa_2 + \cdots$$

四、空间后方交会的解算过程

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos \phi \cos \kappa - \\ &\sin \phi \sin \omega \sin \kappa \\ &\vdots \end{aligned}$$

获取已知数据(像片比例尺、航高、
内方位元素、控制点的物方坐标)

量测控制点的像平面坐标系坐标 x_i, y_i

$$c_3 = \cos \phi \cos \omega$$

确定未知数的初始值 $X_{s_0} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i, Y_{s_0} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 Y_i, Z_{s_0} = mf, \varphi_0 = \omega_0 = \kappa_0 = 0$

计算旋转矩阵R

计算像点坐标的近似值(x),(y)

组成误差方程式和法方程式: $V = AX - L \quad A^T PAX = A^T PL$

解求外方位元素 $X = (A^T A)^{-1} A^T L \quad X = [dX_s \ dY_s \ dZ_s \ d\varphi \ d\omega \ d\kappa]^T$

否

改正数小于限差

是

结束

$$X_s = X_{s_0} + dX_s$$

$$Y_s = Y_{s_0} + dY_s$$

$$Z_s = Z_{s_0} + dZ_s$$

$$\varphi = \varphi_0 + d\varphi$$

$$\omega = \omega_0 + d\omega$$

$$\kappa = \kappa_0 + d\kappa$$

五、空间后方交会的精度

未知数的协因数阵: $Q_{XX} = (A^T A)^{-1}$

未知数的中误差: $m_i = m_0 \cdot \sqrt{Q_{XX}^{ii}}$ $m_0 = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{2n-6}}$

六、空间后方交会的不定性: 控制点不能位于同一个圆柱面上, 否则解不唯一

后方交会 \longrightarrow 像片的外方位元素 \longrightarrow

解求相应地面点的坐标

一张像片?